

Code-épreuve 030

MATHÉMATIQUES

*L'usage de la calculatrice et du convertisseur est autorisé.*

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

*Les parties I, II et III sont indépendantes.*

Soit la suite réelle  $u$  de premier terme  $u_0 = 3$  et définie par la relation de récurrence  $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{1+u_n}$ , pour tout entier naturel  $n$ .

1. Démontrer que tous les termes de la suite sont strictement positifs.
2. Si la suite  $u$  est convergente, démontrer que sa limite  $\ell$  est solution de l'équation  $x^2 + x - 2 = 0$  et en déduire la valeur de  $\ell$ .
3. Soit la suite  $v$  de terme général  $v_n = u_n^2 + 2$ , pour tout entier naturel  $n$ .  
Démontrer que  $v$  est une suite géométrique convergente et préciser sa limite.
4. En déduire que la suite  $u$  est convergente et déterminer sa limite.

Dans un tiroir de commode sont rangées 1 paire de gants blancs et 2 paires de gants noirs.

Ces gants sont pêle-mêle et on ne peut distinguer au toucher ni la couleur, ni s'il s'agit d'un gant droit ou gauche.

On prélève au hasard et dans l'obscurité deux gants dans ce tiroir.

1. Calculer la probabilité de l'événement A : « les deux gants tirés sont de même couleur ».
2. Calculer la probabilité de l'événement B : « la paire de gants prélevée est constituée d'un gant droit et d'un gant gauche ».
3. Calculer la probabilité de l'événement C : « la paire de gants prélevée est correcte ». Une paire de gants est correcte lorsqu'elle est constituée d'un gant gauche et d'un gant droit de la même couleur.

Tournez la page S.V.P.

Soit  $u$  la fonction numérique d'une variable réelle qui à  $x$  associe

$$u(x) = x^3$$

1. Soient  $h$  et  $h'$  les fonctions définies par

$$h(x) = u(\tan x);$$

$$h'(x) = \frac{\sin x - 3 \cos x}{\sin x - \cos x}$$

- a. Montrer que  $h$  et  $h'$  coïncident sur une partie de  $\mathbb{R}$  à préciser.
  - b. Étudier la fonction  $h$ , établir le tableau de ses variations.
  - c. Tracer sa courbe représentative.
2. a. Soit  $v$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . À quelle condition supplémentaire doit satisfaire la fonction  $v$  pour que  $u \circ v$  soit dérivable sur  $I$  ?
- b. On note  $j(x) = \int_0^x (t-1)^2 dt$

et  $k(x) = \int_1^x (e^t - 1)^2 dt.$

Calculer  $j(x)$  et  $k(x)$  en précisant les valeurs de  $x$  pour lesquelles ces intégrales sont définies.